正定二次型的一个判定定理的另一种证明

(三明学院 黄益生)

下面的定理是判定一个实二次型的正定性的重要定理.

定理. 一个 n 元实二次型 $q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$ 是正定的当且仅当它的矩阵 A 的 n 个顺序主子式全大于零.

这个定理的充分性的证明篇幅较长, 难度也较大. 在目前各个版本的教科书中，都是利用数学归纳法和分块矩阵，去证明上述二次型的矩阵 A 是正定的，然后下结论：这个二次型也是正定的. 于是在证明这个定理之前，除了需要介绍正定二次型的概念及其有关的性质以外，还要介绍正定矩阵的概念及其有关性质. 这就导致正定二次型的内容和正定矩阵的内容必须交错在一起，不能单独进行讨论，从而使得其中的条理不够清晰. 那么我们能不能象证明定理的必要性那样，只用正定二次型的概念及其有关性质，去证明定理的充分性呢？回答是肯定的. 采用这种方法去证明上述定理，只须用到下面两个定义和三个结论.

定义 1. 设 $q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个 n 元实二次型. 如果对任意 n 个不全为零的实数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 恒有 $q(c_1, c_2, \cdots, c_n) > 0$, 那么称 $q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 **正定的**.

定义 2. 设 $A = (a_{ij})$ 是一个 n 阶方阵，则称 A 的左上角的那个 k 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

为 A 的 k 阶 **顺序主子式**, 这里 $k = 1, 2, \cdots, n$.

结论 1. 数域 F 上的每一个 n 元二次型 $X'AX$ 都可以经过一个适当的非退化线性替换化成标准形，即存在数域 F 上的一个 n 阶可逆矩阵 C, 使得

$$X'AX \xlongequal{X=CY} d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2,$$

其中 $C'AC = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$.

结论 2. 设 $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$ 是 n 元实二次型 $q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的一个标准形，则 $q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定的当且仅当 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 全大于零.

结论 3. 若 $X'AX$ 是一个正定二次型，则它的矩阵 A 的行列式 $|A|$ 大于零.

现在，让我们利用这些定义和结论给出上述定理的证明.

证明. 设 $A=(a_{ij})$, 则所给二次型可以表示成

$$q(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j.$$

令
$$q_k(x_1, x_2, \cdots, x_k)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}x_ix_j, \quad k=1, 2, \cdots, n,$$

则 $q_k(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 是一个 k 元实二次型. 设它的矩阵为 A_k, 则 A_k 是 A 的左上角的那个 k 阶小矩阵，因而 $|A_k|$ 是 A 的 k 阶顺序主子式. 容易验证,

$$q_k(x_1, x_2, \cdots, x_k)=q(x_1, x_2, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0),$$

并且当 $k=n$ 时，有 $q_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)=q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$; 而当 $k<n$ 时，有

$$q_k(x_1, x_2, \cdots, x_k)=q_{k+1}(x_1, x_2, \cdots, x_k, 0). \tag{1}$$

现在，设 $q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定的，则对任意 k 个不全为零的实数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$, 有

$$q_k(c_1, c_2, \cdots, c_k)=q(c_1, c_2, \cdots, c_k, 0, \cdots, 0)>0,$$

所以 $q_k(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 是正定的. 根据结论 3, 有 $|A_k|>0,\ k=1, 2, \cdots, n$.

其次，设 $q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 不是正定的，即 $q_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 不是正定的，那么可设下列 n 个实二次型

$$q_1(x_1),\ q_2(x_1, x_2),\ \cdots,\ q_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

中第一个非正定的为 $q_k(x_1, x_2, \cdots, x_k)$. 这样，当 $k=1$ 时，由于 1 元实二次型 $q_1(x_1)=a_{11}x_1^2$ 不是正定的，根据结论 2, 我们有 $a_{11}\leqslant 0$. 从而有

$$|A_1|=|a_{11}|=a_{11}\leqslant 0.$$

下面证明，当 $k>1$ 时，也有 $|A_k|\leqslant 0$. 事实上，根据结论 1, 存在实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个 k 元非退化线性替换 $X=CY$, 使得

$$q_k(x_1, x_2, \cdots, x_k)\xlongequal{X=CY} d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ky_k^2, \tag{2}$$

其中
$$C'A_kC=\operatorname{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_k\}. \tag{3}$$

因为 $q_k(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 不是正定的，根据结论 2, $d_1, d_2, \cdots, d_k$ 中至少有一个小于或等于零. 不妨设 $d_1\leqslant 0$. 我们断言，$d_2, \cdots, d_k$ 全大于零. 事实上，如果 $d_2, \cdots, d_k$ 中至少有一个小于或等于零，比如说 $d_2\leqslant 0$, 那么对任意的 $u\in\mathbb{R}$, 有

$$d_1u^2+d_2\leqslant 0. \tag{4}$$

另一方面，在 k 元列空间 $\mathbb{R}^k$ 中取两个向量

$$\varepsilon_1=(1, 0, 0, \cdots, 0)' \ \text{与}\ \varepsilon_2=(0, 1, 0, \cdots, 0)'.$$

令 $\alpha=C\varepsilon_1$, 并记 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_k)'$, 则由 (2) 式，有

$$q_k(a_1, a_2, \cdots, a_k) \xlongequal{\alpha = C\varepsilon_1} d_1. \tag{5}$$

已知 C 是可逆的，并且 $\varepsilon_1 \neq \theta$, 那么 $\alpha \neq \theta$. 下证 α 的最后一个分量 a_k 不等于零. 事实上，若 $a_k = 0$, 则 $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ 不全为零，并且由 (5) 式，有

$$q_k(a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, 0) = d_1.$$

再由 (1) 式，得 $q_{k-1}(a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}) = d_1$. 根据前面的假定，

$$q_{k-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1})$$

是正定的. 因此 $d_1 > 0$, 与 $d_1 \leqslant 0$ 矛盾. 这就证明了 $a_k \neq 0$. 现在，令 $\beta = C\varepsilon_2$, 并记 $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_k)'$ 且 $u_0 = -\frac{b_k}{a_k}$, 则

$$u_0 a_k + b_k = -\frac{b_k}{a_k} a_k + b_k = 0.$$

从而

$$\begin{aligned} u_0\alpha + \beta &= u_0(a_1, a_2, \cdots, a_k)' + (b_1, b_2, \cdots, b_k)' \\ &= (u_0a_1 + b_1, \cdots, u_0a_{k-1} + b_{k-1}, u_0a_k + b_k)' \\ &= (c_1, c_2, \cdots, c_{k-1}, 0)', \end{aligned}$$

其中 $$c_i = u_0a_i + b_i,\ i = 1, 2, \cdots, k-1.$$

设 $\gamma = u_0\alpha + \beta$, 则 $\gamma = (c_1, c_2, \cdots, c_{k-1}, 0)'$, 并且

$$\gamma = u_0\alpha + \beta = u_0C\varepsilon_1 + C\varepsilon_2 = C(u_0\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

再设 $\xi = u_0\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, 则 $\xi = (u_0, 1, 0, \cdots, 0)'$ 且 $\gamma = C\xi$. 根据 (2) 式，有

$$q_k(c_1, c_2, \cdots, c_{k-1}, 0) \xlongequal{\gamma = C\xi} d_1u_0^2 + d_2,$$

根据 (1) 式，又有

$$q_{k-1}(c_1, c_2, \cdots, c_{k-1}) = d_1u_0^2 + d_2. \tag{6}$$

因为 C 是可逆的，且 $\xi \neq \theta$, 所以 $\gamma = C\xi \neq \theta$, 从而 $c_1, c_2, \cdots, c_{k-1}$ 不全为零. 又因为 $q_{k-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1})$ 是正定的，根据 (6) 式，有 $d_1u_0^2 + d_2 > 0$. 这与 (4) 式，即 $d_1u_0^2 + d_2 \leqslant 0$ 矛盾. 这就证实了上述断语. 现在，由于 d_1 小于或等于零，并且 $d_2, \cdots, d_k$ 全大于零，根据 (3) 式，我们得到

$$|C'|\,|A_k|\,|C| = |C'A_kC| = d_1d_2\cdots d_k \leqslant 0,$$

即 $|C|^2|A_k| \leqslant 0$. 注意到 C 是一个可逆实矩阵，因此 $|C|^2 > 0$, 故 $|A_k| \leqslant 0$.

综上所述，如果 $q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定的，那么它的矩阵 A 的一切顺序主子式全大于零，否则它的矩阵 A 至少有一个顺序主子式小于或等于零. 换句话说， $q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定的当且仅当它的矩阵 A 的 n 个顺序主子式全大于零. □